数理解析研究所講究録
342巻 1979年 28-32

Monotone写像について.

香川大・教育　　酒井 克郎

1950年代におけるR.D. Andersonの一連の仕事のなかで証明なしに報告された結果に，D.C. Wilsonが与えた証明をきっかけに，J.J. Walshは[1][2][3]で次の美しい定理を示した。

定理1．Mを3次元以上のcompact連結PL-多様体またはcompact連結Q-多様体，Yをcompact連結ANRとするとき，連続写像$f: M \to Y$がmonotone写像とhomotopicになる必要十分条件は$f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(Y)$が全射となることである。

定理2．MとYを上の様にとるとき，連続写像$f: M \to Y$が開写像にhomotopicとなる必要十分条件は，$f_*(\pi_1(M))$が$\pi_1(Y)$において有限指数をもつことである。

また，Walshは[4]でmonotone写像への拡張に関する次の定理を示した。

定理3．Mを3次元以上のcompact連結PL-多様体，Xを

$\dim X \leqq \dim M-2$ となる閉集合，Yをcompact連結ANRとするとき，連続写像 $f: M \to Y$ が基本群の間の全射を導くならば，$X \cup \partial M$ を止めてmonotone開写像にhomotopicとなる。

この定理を用いることによって定理1の定義域の条件は，多少弱められる。

<u>定理</u>1′．Kを2次元以下の主単体とcut-pointをもたない連結な有限複体，Yをcompact連結ANRとするとき，連続写像 $f: M \to Y$ がmonotone写像にhomotopicとなる必要十分条件は，基本群の間の全射を導くことである。

ここで次元に関する条件はWhyburnの本のIX．定理2.1よりS^2から2胞体にはmonotone写像が存在しないことから，またcut-pointに関する条件は次の簡単な例から落せないことがわかる。

例．．Xを2つのsolid torusを1点x_0でくっつけた空間とし，Yをsolid torusとして，$f: X \to Y$をそれぞれのsolid torusに制限したとき位相同型となるように定義すれば，fとhomotopicな写像はXの2つのsolid torusを1点につぶさない。x_0の像を含まないYの連結部分集合でXの2つのtorusの像と交わるものをとれば，その逆像は連結にはならない。

任意の多面体に関しては上の簡単な系として次の形のものを得る。

<u>定理1″</u>　Xをcompact連結多面体，Yをcompact連結ANRとするとき，連続写像 $f: X \times I^2 \longrightarrow Y$ がmonotone写像とhomotopicとなる必要十分条件は基本群の間の全射を導くことである。

定理1′は次の補題より簡単に導びかれる。

<u>補題</u>．Kを定理1′のようにとると，自然な単射 $i: K \to K \times Q$ $(i(x) = (x, 0))$ とhomotopicになるようなmonotone写像が存在する。

（証明）Kの1次元以上の単体 σ について，$\sigma \times Q$ がPeano連続体であることから，i とhomotopicな写像 $f: K \to K \times Q$ で $f(\sigma) = \sigma \times Q$ となるものをまず作り，Kの各主単体に対して定理3を適用して，各主単体ごとに辺では f と同じになるmonotone写像を定義すればよい。□

定理2については，定義域の条件を弱めることにまだ成功していない。

定理1，2に関連して種々の写像のhomotopy classの特徴づけが出来るかどうか考えられるが，monotone写像より条件の弱い写像については，Walshの[5]の結果から，quasi-open

写像のhomotopy classは開写像のhomotopy classと同じになり，従ってその特徴づけも同じになる。よって例えば，定理1の空間の間のconfluent写像とhomotopicになるような写像は，定義域の基本群を値域の基本群の指数有限の部分群に写すような準同型写像を導くようなものにかぎることがわかる。

<u>問題</u>．弱confluent写像とhomotopicになる写像は何か？

また，monotone写像より条件の強い写像としてUV^n写像というのがあるが，その特徴づけも問題となる。ただし，Wilson[6]によれば $2k+1$ 次元以下のcompact連結多様体からI^nへのUV^k写像があれば，nは$\dim M$以下となる。よって定義域の次元はkより十分高くなければならない。Walshの証明から次の問題が起る。

<u>問題</u>　十分次元の高い多様体からANRへのk-連結写像は，UV^k写像とhomotopicとなるか？

参考文献

[1] Walsh, J.J. : Monotone and open mappings on manifolds I., Trans. AMS 209 (1975) 419−432

[2] ———— : Light open and open mappings on manifolds II., Trans. AMS. 217 (1976) 271−284

[3] ———— : Monotone and open mappings onto ANR's. Proc. AMS. 60 (1976) 286−288.

[4] ———— : Extending mappings to monotone mappings. Houston J. Math. 3 (1977) 579−592

[5] ———— : Isotoping mappings to open mappings, Trans. AMS., to appear.

[6] Wilson, D.C. : Open mappings on manifolds and a counter-example to the Whyburn conjecture, Duke Math. J. 40 (1973) 705−716.

[7] Whyburn, G.T. : Analytic Topology, AMS Colloq. Publ. 28. 1942.